תרגול 2

Thursday, April 16, 2026 12:27 PM

וקטורים במרחב:

מכפלה סקלרית

יהי $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ המכפלה הסקלרית שלהם מוגדרת ע"י

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

תכונות

1. חילופית: הינו סקלר.
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. אחרים:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

$$\left(\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) \qquad \vec{a},\vec{b}\neq 0$$

4. הטלה של וקטור $\vec{b}$ על $\vec{a}$:

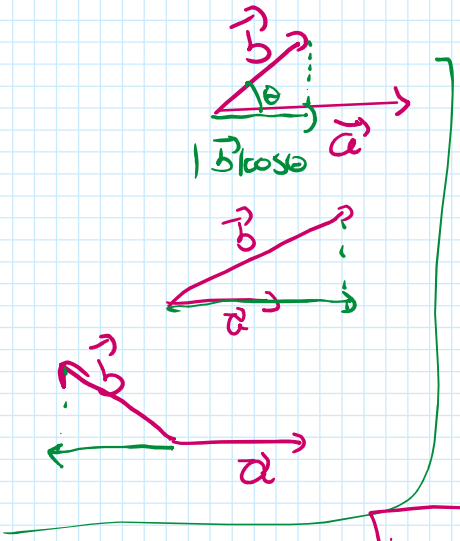
תרגיל:

חשבו את ההטלה של $\vec{b}=(1,1,1)$ על $\vec{a}=(1,2,3)$

פתרון

$$P_{\vec{a}}(\vec{b})=(|\vec{b}|\cdot\cos\theta)\,\hat{a} \quad (\text{כאשר } \theta \text{ הזווית בין } \vec{a} \text{ ל}\vec{b})$$

$$=\left(\cancel{|\vec{b}|}\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\cancel{|\vec{b}|}}\right)\hat{a}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\hat{a}$$



חזרה לתרגיל שלנו:

$$P_{\vec{a}}(b)=\left(\frac{\overset{\vec{a}\cdot\vec{b}}{(1,2,3)\cdot(1,1,1)}}{\underset{|\vec{a}|}{\sqrt{14}}}\right)\frac{\overset{\vec{a}}{(1,2,3)}}{\underset{|\vec{a}|}{\sqrt{14}}}=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}=\frac{6}{14}(1,2,3)$$

$$=\frac{1+2+3}{14}(1,2,3)=\frac{3}{7}(1,2,3)$$

$$\boxed{\left(\frac{\cancel{\vec{a}}\cdot\vec{b}}{\cancel{|\vec{a}|}}\right)\hat{a}=(\hat{a}\cdot\vec{b})\,\hat{a}}$$

תרגיל

$P_{\vec{b}}(\vec{a})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ #

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \cos\theta=0 \iff |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=0 \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

שאלה מבוחן אוגוסט (יש)

נתונים וקטורים $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ כך ש:

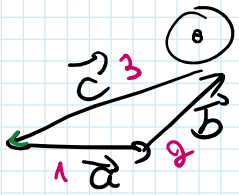
$$\begin{cases} |\vec{a}|=1 \\ |\vec{b}|=8 \\ |\vec{c}|=3 \\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \end{cases}$$

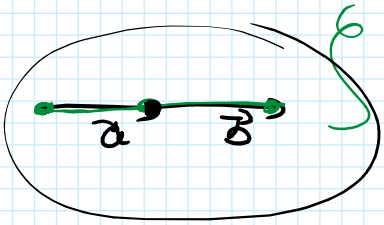
חשבו את

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=?$$

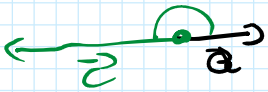
דרך א (פיתרון)

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow$ נניח הוקטורים $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ יוצרים שלש





כי $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{c}|$ שמצב בשלש ינוון.



אז $\theta_{\vec{a}\vec{b}}=0$

$\theta_{\vec{a}\vec{c}}=\theta_{\vec{b},\vec{c}}=180^\circ$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\underbrace{|\vec{a}|}_{1}\cdot\underbrace{|\vec{b}|}_{8}\cdot\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{|\vec{a}|}_{1}\cdot\underbrace{|\vec{c}|}_{3}\cdot\underbrace{\cos(180)}_{-1}+\underbrace{|\vec{b}|}_{8}\cdot\underbrace{|\vec{c}|}_{3}\cdot\underbrace{\cos(180)}_{-1}$$

$$=8-3-6=-7$$

דרך ב: (לשבוע הבא)

$$0=\vec{0}\cdot\vec{0}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$$

$(x+y+z)^2$

$(\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0)$

$(x+y+z)^2$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2\right)$

$+\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{c}$

$= \underbrace{|\vec{a}|^2}_{1} + \underbrace{|\vec{b}|^2}_{2} + \underbrace{|\vec{c}|^2}_{3} + 2(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}}_{x})$

$0 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2x$

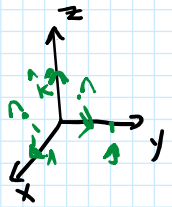
$-14 = 2x$

$\boxed{-7 = x}$ //

מכפלה וקטורית

הגדרה:

יהי $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, המכפלה הווקטורית שלהם מוגדרת ע"י:



$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$ //

$\left((7,5,6) = 7\overbrace{(100)}^{\hat{i}} + 5\overbrace{(010)}^{\hat{j}} + 6\overbrace{(001)}^{\hat{k}}\right)$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + -(a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$

דוגמא לחישוב: חשבו $(1,2,3)\times(1,4,6) = ?$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (0, -3, 2)$$ //

תכונות חשובות:

1) המכפלה היא **ווקטור**.

2) $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$ (אין קומוטטיביות)

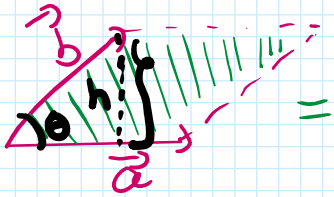
(למעשה מתקיים: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$)

3) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\theta|$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\theta|$

שטח המקבילית שנפרשת = ע"י הווקטורים $\vec{a},\vec{b}$.

שטח מקבילית



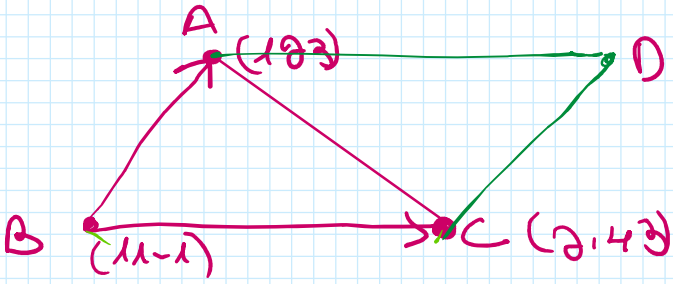
= אורך · גובה

$|\vec{a}|$ $\quad$ $h=|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

תרגיל

חשב את שטח המשולש שקודקודיו הם

$A=(1,2,3)$, $B=(1,1,-1)$, $C=(2,1,4)$



$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ADCB} = \frac{1}{2}|\vec{BC}\times\vec{BA}|$

$= \frac{1}{2}|(8,-4,1)|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{64+16+1} = \frac{9}{2}$

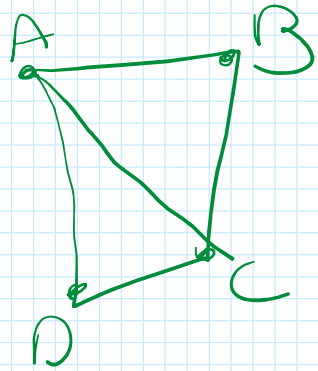
$\vec{BC} = (1\ 3\ 4)$

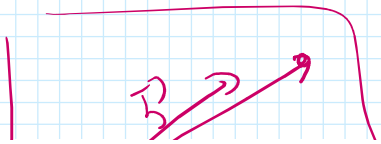
$\vec{BA} = (0\ 1\ 4)$

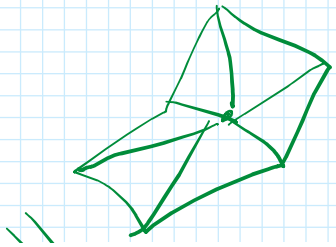
$$\vec{BC}\times\vec{BA} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

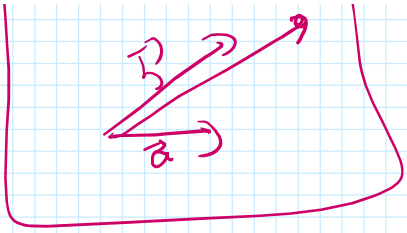
$= (8,-4,1)$

שטח של מרובע









ניתן בעזרת הכפלה
וקטורית לבדוק שאכן שלב כל הפעולה

הכיוון של הווקטור $\vec{a}\times\vec{b}$ מאונך ל $\vec{a}$ ול $\vec{b}$
(גם $\vec{a}+\vec{b}$ גם $\vec{a}\times\vec{b}$ מאונך לאותו שניהם ל $\vec{a}$ ו $\vec{b}$)

נשים לב $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff |\sin\theta|=0 \iff |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\theta|=0 \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

(רפיים $\vec{a}\times\vec{a}=0$)

הכפלה של שלושה וקטורים

$\vec{x}\cdot\vec{y}$
$\vec{y}\cdot\vec{x}$
לא מתחלף

לא מתחלף $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=?}$

לא יפיין אותנו $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}}$

אלגוריתם $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$

לא מתחלף

כן מתקיים שוויון לפי:
$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq a\times(\vec{b}\times\vec{c})$

הכפלה המעורבת

יהיו $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ שלושה וקטורים
הכפלה המעורבת שלהם מוגדרת ל $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$.

תכונות

הנפח הוא סקלר.

#
$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

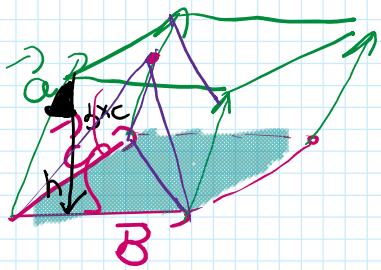
$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right)$$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}| =$ נפח המקבילן הנוצר ע"י $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

סימן הנפח

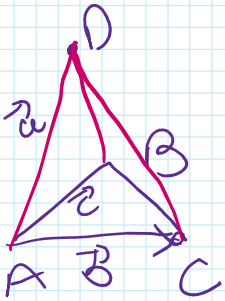


$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = |\vec{a}|\cdot\underbrace{|\vec{b}\times\vec{c}|}_{\text{שטח הבסיס}}\cdot\cos\theta$$

$$= \underbrace{|\vec{b}\times\vec{c}|}_{\text{שטח הבסיס}}\cdot\underbrace{|\vec{a}|\cdot|\cos\theta_{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}|}_{\text{גובה המקבילן } h}$$

תרגיל:

חשבו את נפח הפירמידה השלושה שקודקודיה הם A,B,C,D.



$$S_{\text{פיאה } ABC} = \frac{1}{6}\underbrace{|\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}|}_{\text{נפח המקבילן}}$$

$$= \frac{1}{6}|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\times\vec{AD}|$$

$a,b,c \neq 0$

$a\cdot\vec{b}\times\vec{c} = 0 \iff$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ נמצאים על אותו מישור

$\iff$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ חלויים לינארית

a,b,c תלויים קו־לינארית

תרגיל

יהיו $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ווקטורים בלתי תלויים.
ויהי וקטור $\vec{v}\neq 0$ המקיים:

$$\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{a}=1\\ \vec{v}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{v}\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$

כאן נשאר $\lambda=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$

הוכיחו: $\lambda\vec{v}=\vec{c}\times\vec{b}$

פתרון:

$$\begin{cases}\vec{v}\perp\vec{b} \iff \vec{v}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{v}\perp\vec{c} \iff \vec{v}\cdot\vec{c}=0\end{cases} \Rightarrow \vec{c}\times\vec{b}\parallel\vec{v}$$

$\Downarrow$

קיים מספר α סקלר

כך ש: $\alpha\vec{v}=\vec{c}\times\vec{b}$

נסמן זאת להיות ש $\lambda=\alpha$, נקבל

$$\lambda=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=a\cdot\alpha\vec{v}=\alpha(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{v}}_{1})=\alpha$$

פתרון על נכונות:

(1)

$$\lambda\cdot\vec{v}=(\vec{a}\times\vec{b}\cdot c)\cdot v=(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c})\cdot v=(\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot v$$

$$=\vec{b}\times\vec{c}\cdot(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{v}}_{1})=\vec{b}\times\vec{c}$$

(2)

$$\lambda v=b\times c \quad \Big|\cdot a \quad \text{כפל סקלר}$$

$$\Updownarrow \qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{\lambda v\cdot a}_{1}=b\times c\cdot a$$

$$\Updownarrow \qquad \Uparrow \checkmark$$

$$\lambda=\lambda$$

$$\lambda=\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(v\cdot a)=b\times c\cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda v=b\times c$$

ניחוש

$$\parallel$$

$$\vec{v}\cdot a=\vec{b}\cdot a$$

$\vec{x}\cdot a = \vec{y}\cdot a \overset{?}{\Downarrow} x = y$ לא נכון

$(0\ 1\ 1)\cdot \overset{(1\,2\,3)}{a} = (5\ 0\ 0)\cdot \overset{(1\,2\,3)}{a}$

משוואת מישור

הגדרה:

נתון משוואת מישור שעובר בנקודות

$A=(1,2,3)$

$B=(1,1,1)$

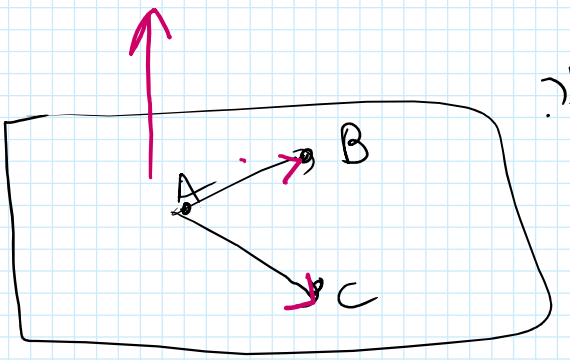
$C=(4,8,7)$

תזכורת:

משוואת מישור

$\vec{AC}\times\vec{AB} = (3\ 6\ 4)\times(0\ -1\ -2)$

$ax+by+cz=d$



אתקבל $\vec{n}=(a,b,c)$ נורמל למישור.

$$\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (8,-6\ 3) = \vec{n}$$

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0-(-6) = 6 \right)$$

$$\boxed{8x-6y+3z=d}$$

$B:\ 8\cdot 1 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 = 5$

$\Rightarrow \boxed{8x-6y+3z=5}$ $1\cdot\frac{7}{5}$ חשבון סופית.

הכוונה

$$\frac{136}{5}x - \frac{109}{5}y + \frac{51}{5}z = 17$$